PART3 余弦定理の利用

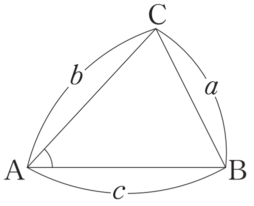
要点① 余弦定理を利用して角の大きさを求める

余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



を変形することで，次の式が得られる。

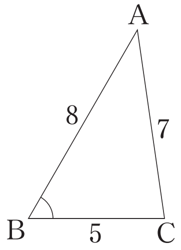
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

例 △ABC において，$a=5$，$b=7$，$c=8$ のとき，B を求める。

余弦定理より

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\underline{\qquad\qquad}=\frac{40}{2\cdot 8\cdot 5}=\frac{1}{2}$$

よって $B=60°$



要点② 2 辺と 1 つの角から残りの辺を求める

余弦定理を用いて，2 つの辺の長さとその間ではない角の大きさが与えられたとき，残りの辺の長さを求める。

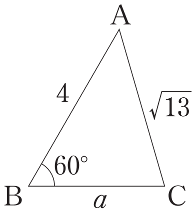
例 △ABC において，$b=\sqrt{13}$，$c=4$，$B=60°$ のとき，a を求める。

余弦定理より

$(\sqrt{13})^2=4^2+\quad-2\cdot 4\cdot\quad\cdot\cos 60°$

$13=16+a^2-2\cdot 4\cdot a\cdot\frac{1}{2}$

$a^2-4a+3=0\qquad (a-1)(a-3)=0$



よって　$a=1,\ 3$　（ともに $a>0$）

【MEMO】

3　△ABC において，次の問いに答えよ。

(1)　$a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{2}$，$c=4$ のとき，A を求めよ。

(2)　$a=2\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{7}$，$C=30^\circ$ のとき，b を求めよ。

Point Pickup

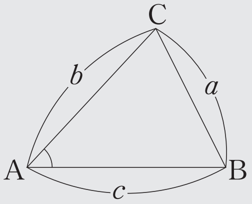
余弦定理の利用

△ABC について

① $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $\Longleftrightarrow$ ①′ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

② $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ $\Longleftrightarrow$ ②′ $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

③ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ $\Longleftrightarrow$ ③′ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



・①～③は，2 辺の長さと 1 つの角の大きさから，残りの 1 辺の長さを求めるとき
・①′～③′ は，3 辺の長さから，ある角の大きさを求めるとき
に使うとよい。

第13講 PART3 確認問題

1 △ABC において，$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{7}$ のとき，

$C=$ [アイ]$^\circ$ である。

2 △ABC において，$a=7$，$b=5$，$A=60^\circ$ のとき，

$c=$ [ウ] である。

PART3 余弦定理の利用

3 △ABC において，次の問いに答えよ。

(1) $a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{2}$，$c=4$ のとき，A を求めよ。

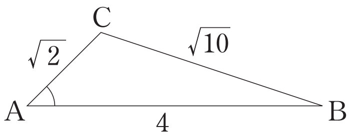
(2) $a=2\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{7}$，$C=30°$ のとき，b を求めよ。

[解答]

(1) 余弦定理より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^2+4^2-(\sqrt{10})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot4}=\frac{8}{8\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



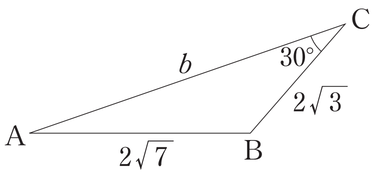
よって $A=45°$

(2) 余弦定理より

$$(2\sqrt{7})^2=(2\sqrt{3})^2+b^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot b\cos30°$$

$$28=12+b^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b^2-6b-16=0 \qquad (b+2)(b-8)=0$$



$b>0$ より $b=8$

第13講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：60

[解説]

余弦定理より，

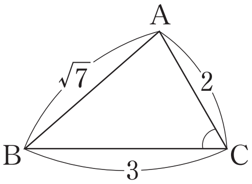
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot3\cdot2}$$

$$=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

よって，

$\boldsymbol{C=60^\circ}$



[A]　余弦定理
△ABC において，
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
$\Longleftrightarrow \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

2

[正解] ウ：8

[解説]

余弦定理より，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \quad \text{[B]}$$

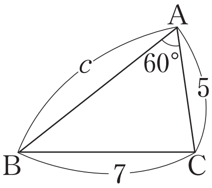
$$7^2=5^2+c^2-2\cdot5\cdot c\cos 60^\circ$$

$$49=25+c^2-2\cdot5\cdot c\cdot\frac{1}{2}$$

$$c^2-5c-24=0$$

$$(c+3)(c-8)=0$$

$c>0$ より，$\boldsymbol{c=8}$



[B]　A がわかるので，A を含む余弦定理の式を使う。
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$